

■ ロケット数学

自分の作ったロケットが打ち上がる姿を見るのはとても気持ち良いものです。でも打ち上げる前にどの位の高さまで上がるのか事前に予測できたら、その打上げはもっと有意義なものになると思います。

自分の作ったロケットがどんな速度でどの位の高さまで打ち上げるのか概算計算方法を紹介します。



小学校の復習

距離と時間と速度の関係を復習しましょう

$V=h/t$ v :速度[m/秒]、 h 距離[m]、 t 時間[sec]

これは速度が一定の場合(等速運動)の関係式です。

$h=V \times t$ と式を変形すれば、速度に時間を掛けることで移動距離が求められることがわかります。

しかし実際のロケットは一定の速度では飛行しません。

発射ボタンを押した瞬間は速度0で、燃料を燃やしながらガスを頂射している間はどんどんスピードが速くなっていきます。

そして燃焼終了した瞬間が最高速度となり、その後は慣性により一定の速度で上昇を続けようとしますが、重力や空気抵抗で徐々に速度が落ちていき、やがて速度は0になります。この時点で最高到達点に至ります。

あとはパラシュートを開いてゆっくり降りてきます。

予想到達速度を求める

トータルインパルス(全力積)をロケットの平均質量で割ると速度が求められます。

実際にはいくつかの外乱が速度を抑えようとしますが、主な抵抗は重力と空気です。

トータルインパルス(全力積)を I_t [Ns]、ロケットの平均質量を M_{av} [g]、重力による速度損失を V_g [m/s]、空気抵抗による速度損失を V_a [m/s]とすると、次式で到達速度 V_b (m/S)を求めることができます。

到達速度 $V_b = I_t / M_{av} - V_g - V_a \dots (1)$

動力飛行中は燃料が減っていきますので、

ロケットの質量は飛行中に連続的に軽くなっていきます。

この質量の変化を考慮するために、燃焼前の質量と燃焼終了直後の質量から平均質量を求めます。

ロケットの平均質量 M_{av} は、エンジンを除いた機体の質量 M_b と燃焼前のエンジン質量 M_i を足したもののから推進薬質量 M_p の半分を引いた値となりますので、次式となります。

ロケットの平均質量 $M_{av} = M_b + M_i - M_p / 2 \dots (2)$

重力速度損失 V_g は、燃焼中の時間 T_b にかかる重力加速度 $g(98m/s^2)$ ですから、次式となります。

重力速度損失 $V_g = T_b \times g$

飛行中のモデルロケットには常に空気抵抗がかかります。

概略計算ですので空気抵抗による速度損失 V_a は重力速度損失 V_g と同じと仮定して、合わせて $2T_b \times g$ と置き換え(1)の式を変形します。

到達速度 $V_b = I_t / M_{av} - 2T_b \times g \dots (3)$

使用エンジンのトータルインパルスと燃焼時間、ロケットの質量、未使用エンジン質量、推進薬の質量から、到達速度の概算が求められます。

予想到達高度の計算

ロケットが上昇する時間は、推力飛行中と慣性飛行中の時間の合計です。

まず慣性飛行時間 T_c を求めます。

到達速度 V_b に達したロケットが重力と、空気抵抗で減速され速度が0になるまでの時間が慣性飛行時間です。

ここでも重力速度損失 V_g と空気抵抗による速度損失 V_a は同じと仮定して $2T_c \times g$ と置き換えます。

なお、 T_c より延長時間の方が短い場合は、慣性上昇中にパラシュートを放出してしまうということになります。

すると、急ブレーキがかかってパラシュートが破れたり、機体が損傷する原因となります。

$$V_b - V_g - V_a = V_b - 2T_c \times g = 0 \text{ から } T_c = V_b / 2g \dots\dots(4)$$

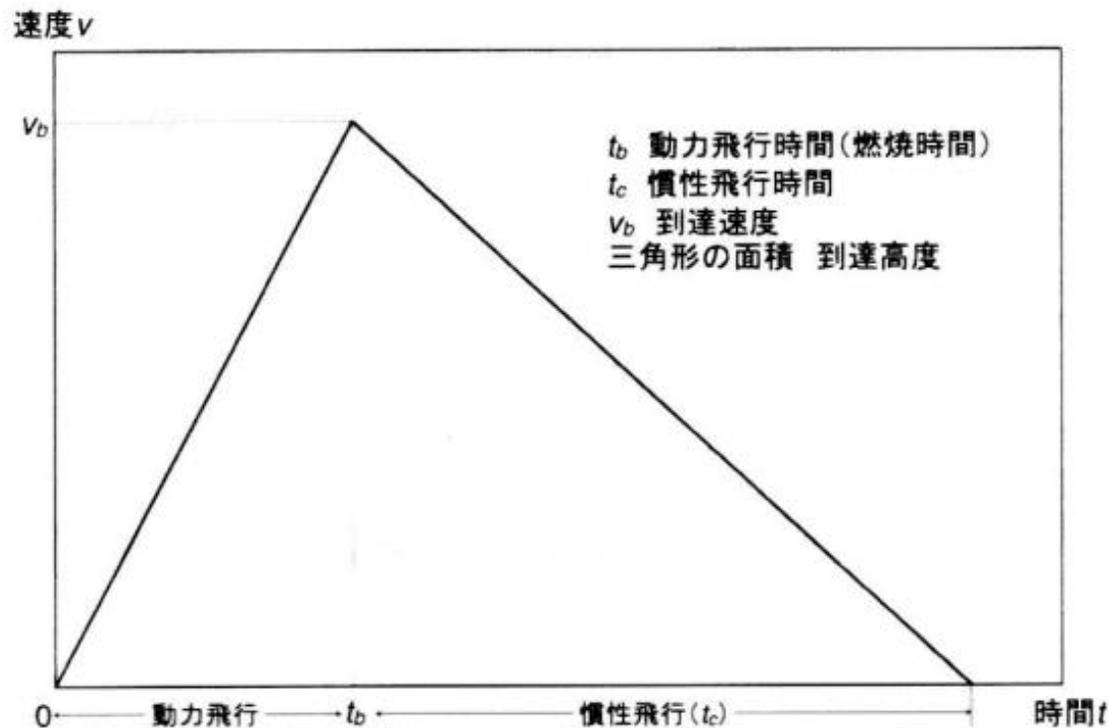
モデルロケットの時間と速度の関係グラフをよく見てください。

この速度の折れ線と時間軸の三角形の面積がロケットの到達高度となります。

つまり到達高度 h は、飛行時間に到達速度の半分をかかけたものになりますから次式で計算できます。

$$h = 1/2 \times V_b (T_b + T_c) \dots\dots(5)$$

モデルロケットの時間と速度の関係グラフ



モデルロケットの時間と速度の関係グラフ

計算例

質量30gのロケットをA8-3エンジンで打ち上げた場合の到達速度と到達高度を求めてみましょう

エンジンを除いた機体質量 $M_b = 30g = 0.03kg$

A8-3のトータルインパルス $I_t = 2.5Ns$

使用前エンジン質量 $M_i = 16g = 0.016kg$

推進薬質量 $m_p = 33g = 0.033kg$

燃焼時間 $T_b = 2.5Ns \div 8N = 0.31s$

延長時間 $T_d = 30s$ より、ロケットの平均質量 M_{av} は式(2)から、

$$M_{av} = 0.03 + 0.016 - 0.0033 / 2 = 0.04435kg$$

到達速度 V_b は式(3)から、 $v_b = 2.5 / 0.04435 - 2 \times 0.31 \times 9.8$

$$= 50.294m/s = 181km/h$$

慣性飛行時間 T_c は式(4)から、

$$t_c = 50.294 / (2 \times 9.8) = 2.57s$$

$$h = 1/2 \times 50.294 \times (0.31 + 2.57)$$

$$= 72.42m$$

時速181km/hで72mまで上がることが予想出来ます。

Quote : JAR-report2020 (ケイテック/湘南ロケット)

